



Mitä uutta Frege löysi?

Gottlob Frege (1848–1925) oli usein toistetun iskulauseen mukaan yksi nykyaikaisen logiikan tärkeimmistä arkkitehdeista ja hänen esikoisteoksensa *Begriffsschrift* (1879) sen vertaistään hakeva perusteos. Se sisältää uutuuksia, joiden vuoksi väitettä voidaan pitää oikeutettuna.

Miten nykyaikainen logiikka oikein syntyi? Tähän kiinnostavaan ja yhä vielä osittain avoimeen kysymykseen on etsitty vastauksia eri näkökulmista ja varsin vaihtelevalla menestyksellä. Eräät tutkijat ovat tyytyneet toteamaan, että nykyisessä merkityksessään logiikan keksi Gottlob Frege, eikä aitoja ja jäljittelemättömiä keksintöjä voi kukaan viimekädessä selittää. Tällaista lähestymistapaa on kannattanut muiden muassa Michael Dummett (1973; 1991), joka on tutkinut Fregen saavutuksia korostetusti systemaattisesta näkökulmasta ja sivuuttanut kokonaan niiden historialliset asiayhteydet ja taustatekijät.

Dummettin mukaan Fregen tulosten historiallisten taustojen seulomisella ei yksinkertaisesti ole merkitystä nykyiselle logiikan tutkimukselle: katse on suunnattava Fregestä eteenpäin, ei taaksepäin. Tällaista lähestymistapaa on tietenkin arvosteltu monta kertaa ja hartaasti. Sen tunnetuimmista ja samalla parhaista haastajista voidaan mainita Hans Sluga (1980), Volker Peckhaus (1999), Gordon Barker ja Peter Hacker (1984).

Perustavista metodologisista erimielisyyksistäkin riippumatta historiasta piittaamaton näkökulma joutuu outoon valoon kun panemme merkille, että 1880-luvun taitteessa Fregen lisäksi myös Charles Peirce oivalsi miten klassisen logiikan ilmaisuvoimaa voidaan huomattavasti lisätä kvantorien avulla. Jo ensi kuulemalta tuntuisi vaikealta uskoa, että kaksi toisistaan riippumatonta lahjakasta tutkijaa päätyivät pelkästä kohtalon oikusta pohjimmitaan samoihin logiikan historiaa mullistaneisiin tuloksiin kahdesta eri suunnasta muutaman vuoden sisällä 1800-luvun loppupuolella?

Mutta eikö koko kysymyksen nykyaikaisen logiikan synyhistoriasta voisi tehdä tyhjäksi yksinkertaisesti huomauttamalla, että viimekädessähän peruslogiikkamme on kuitenkin pysynyt muuttumattomana ammoisista ajoista lähtien. Mitä uutta predikaattilogiikan kvanttorit muka toivat tullessaan? Mitä muuta esimerkiksi Aristoteles tutki logiikkaa käsittelevissä kirjoituksissaan kuin universaalisten ja partikulaaristen lauseiden välillä vallitsevia loogisia suhteita?

Jos nykyaikaisen logiikan varsinainen ydin piilee formaalisessa teoriassa yleisistä ja erityisistä väitelauseista sekä niiden välillä vallitsevista suhteista, niin eikö sen syntyä pitäisi lähestyä pikemminkin jatkona aikaisemmille, viimekädessä Aristoteleen teoriaan palautuville kehityskuluille,

kuin jonkin kokonaan uuden teorian keksimisenä tai löytymisenä? Tällainen näkökulma korostaa Aristoteleen roolia formaalisen logiikan perustajana, jonka rinnalla Fregekin oli lopulta vain nerokas soveltaja ja perinteen etevä kehittäjä.

Toisaalta on myös ilmeistä, että moni aktiivinen logiikan ammattilainen ei yksinkertaisesti juuri välitä oppiaineensa historiasta. Tällainen välinpitämättömyys johtuu usein niiden merkittävien ja huomionarvoisten erojen aliarvioimisesta, jotka erottavat meidän päiviemme matemaattisesti painottuneen logiikan perinteisestä filosofisemmin asennoituneesta logiikasta. Kuitenkin näitä eroja on olemassa. Esimerkiksi viime vuosisadalla vakiintunut ajatus logiikasta pelkkänä teoriana virheettömästä päättelystä ei olisi tyydyttänyt montakaan 1800-luvulla logiikan alalla työskennellyttä tutkijaa, aikaisempien vuosisatojen ajatteliijoista puhumattakaan (vrt. Vilkkö 2002).

Frege oli usein toistetun iskulauseen mukaan yksi nykyaikaisen logiikan tärkeimmistä arkkitehdeista ja hänen esiköismonografiansa *Begriffsschrift* (1879) sen kiistaton perusteos. Käyn tässä kirjoituksessani läpi ne *Begriffsschriftin* sisältämät teoreettiset uutuudet, joiden ansiosta näitä kiistanalaisia väitteitä voidaan pitää oikeutettuina.

Frege'n kysymys

Ennen Fregeä hieman 1800-luvun puolivälin jälkeen maineikas berliiniläinen matemaatikko Leopold Kronecker ja eräät hänen kollegansa olivat saavuttaneet huomattavia tuloksia aikansa klassisen matematiikan palauttamiseksi kokonaislukujen aritmetiikkaan. Tästä esimerkistä rohkaistuneena Frege keksi kysyä, löytyisikö ehkä aritmetiikan taustalta vielä jotakin, jonka varaan aritmetiikka eli oppi kokonaisluvuista voitaisiin perustaa. Hän lähti etsimään vastausta tähän kysymykseensä yhtäältä luvun käsitteen perusluonteesta ja toisaalta aritmetiikassa esiintyvistä perustavista todistustelmistä.

Hänen hankkeensa eteni voitosta voittoon. Suoritettuaan ensin *Begriffsschriftissä* välttämätöntä ja ensiarvoisen tärkeätä pohjustustyötä, hänen onnistui viisi vuotta myöhemmin määrittellä pelkkien loogisten käsitteiden avulla aritmetiikan perustavimmat käsitteet, kuten luvun, yhtä monilukuisuuden ja identtisyyden käsitteet (Frege 1884). Hänen logi-

sistisen hankkeensa loppuhuipennus, eli aritmetiikan peruslakien todistaminen vain ja ainoastaan näiden määritelmien ja logiikan peruslauseiden avulla, oli määrä toteutua kaksiosaisessa teoksessa *Grundgesetze der Arithmetik* (1893; 1903).

Kaikki meni täysin Fregen suunnitelmien mukaisesti aina siihen saakka kun *Grundgesetzen* jälkimmäinen osa oli kesäkuussa 1902 jo kustantajalla ja Bertrand Russell ilmoitti Fregelle löytäneensä hänen järjestelmästäään erään kiperän ristiriidan. Frege vastasi Russellille viipymättä, kiitti tätä kirjeestään sydämellisesti ja myönsi, että paljastunut ristiriita oli järkyttänyt häntä perusteellisesti. Hänellä riitti kuitenkin rohkeutta uskoa, että voitettuna tämäkin ikävä ongelma osoittautuisi lopulta logiikan kehityksen kannalta erinomaisen tärkeäksi edistysaskeleeksi. Mutta nyt kiirehdin jo kirjoitukseni varsinaisen aiheen edelle.

Begriffsschrift merkitsi logiikan alalla niin suurta mullistusta, että eräät asiantuntijat ovat rohjenneet verrata sitä merkitykseltään vain Aristoteleen *Ensimmäiseen analytiikkaan* (Bocheski 1956, 313; Berka & Kreiser 1971, 22). Vaikka tämän rinnastuksen kohdalla on hyvä pitää mielessä kumpi näistä kahdesta herrasta oli se, joka loi koko perinteen, ja kumpi vain kehitti sitä edelleen, Fregen oivaltamat uudistukset olivat sekä tapansa että laatunsa puolesta vertaansa vailla. On jokseenkin ällistyttävää ajatella, että *Begriffsschriftin* merkittävää paradigman vaihdosta saatiin odottaa logiikan alalla yli kaksi tuhatta vuotta. Ilmeisesti vuosisatojen varrella liian moni rohkeakin ajattelija tyytyi Kantin tavoin pitämään muodollista yleistä logiikkaa ns. ”valmiina tapauksena” johon ei Aristoteleen jälkeen ollut voitu lisätä mitään ja josta ei saanut poistaa mitään (Kant 1787, VIII). Vaikka *Begriffsschrift* on pieni, vain vähän yli satasivuinen kirjanen, tutkijat ovat löytäneet siitä toistakymmentä enemmän tai vähemmän toisiinsa nivoutuvaa tärkeää uudistusta.

Ennen kuin esittelen ja arvioin *Begriffsschriftin* sisältämiä uudistuksia, haluan muistuttaa eräistä historiallisesti herkän tutkimusasenteen peruseriaateista, joiden tunnustamista tieteen historian suurten edistysaskelten arvioiminen välttämättä edellyttää. Ensinnäkin on ehdottoman tärkeää kunnioittaa niitä ratkaisevia käsitteellisiä eroavaisuuksia, joita on helppo tunnistaa nykyaikaisen matemaattisen logiikan ja 1800-luvun filosofisemmin painottuneen logiikan väliltä jo pienellä vaivalla.

Vielä vähän yli sata vuotta sitten logiikan otsikon alla tutkittiin nimittäin moitteettoman ja sitovan päättelyn lakien lisäksi yleisesti myös sellaista aiheita ja ongelmia, jotka nykykäytäntöjen mukaisesti lankeaisivat luontevammin metodologian, tieto-opin, psykologian tai yleisen tieteenfilosofian piiriin. Jokainen yli 120 vuotta sitten uransa luonut loogikko olisi varmasti vierastanut oppialansa määrittelemistä pelkäksi eksaktien kielten lause- ja merkitysoipiksi.

Fregen erityistapauksessa on hyvä muistaa esimerkiksi myös se seikka, että vaikka hän käyttikin sanaa ”funktio” eri tavalla kuin useimmat hänen edeltäjistään ja aikalaisistaan, hän ei tarkoittanut sillä samaa asiaa kuin nykyajan matemaattiset loogikot. Kuten Baker ja Hacker ovat korostaneet:

”Tutkiessamme jotakin menneiden aikojen ajattelijaa meidän tulee selittää hänen käyttämänsä termit siten kuin *hän* ne ymmärsi, ei niin kuin me ne nykyään ymmärrämme. [...] Aivan kuten meidän tulee varoa tiedostamatta heijastamasta omia käsitteitämme menneisyyden

filosoifeille, samoin meidän on varottava päättelemästä, että koska hänen jokin tuloksensa tai metodologinen periaatteensa muistuttaa meidän omia uskomuksiamme, niinpä hän kannatti sitä samoista syistä kuin me, tai että hän kerrassaan tarkoitti sillä saamaa asiaa kuin me nykyään tarkoitamme”. (Baker & Hacker 1984, 5.)

Tavoiteltaessa logiikan historian kannalta herkkää vuoropuhelua *Begriffsschriftin* kirjoittajan kanssa on tärkeätä ottaa tarkasti huomioon paitsi hänen välitön historiallinen taustansa – eli se mitä hän tiesi tai ainakin saattoi tietää – myös kaikki se, mitä hän varmasti ei voinut tietää tai ottaa huomioon.

Frege kirjoitti kaikki keskeiset teoksensa hyvissä ajoin ennen mm. Hilbertin, Brouwerin, Lukasiewiczin, Lesniewskyn ja Tarskin läpimurtoja logiikan ja matematiikan perusteiden parissa – Gödelin kuuluisista tuloksista puhumattakaan. Toivottavasti tämä huomautus kuulostaa itsestään selvältä.

Begriffsschriftin uutuudet

Seuraavaa *Begriffsschriftiin* sisältyvien huomattavien uutuuksien ja edistysaskelten luetteloa voi arvioida parhaiten suhteessa sen välittömään historialliseen taustaan. Toisin kuin Dummett on esittänyt (Dummett 1973, 661), Frege sai työhönsä vaikutteita monelta eri taholta.

Filosofian historian kannalta on ilmeistä, että hän jatkoi monessakin mielessä leibnizilaista ja kantilaista perinnettä – tietoisesti tai ei. Ja mitä tulee logiikan näkökulmaan, kuten jo huomautin aikaisemmin tässä kirjoituksessa, Frege ei ollut ensimmäinen loogikko edes sanan nykyisessä merkityksessä.

1. *Begriffsschriftin* ensimmäisessä luvussa Frege antoi ensimmäisen konsistentin selvityksen muuttujan käsitteestä ja yleisti selvän ja täsmällisen erottelun muuttujien ja vakioiden välillä (Frege 1879, §1).

2. *Begriffsschrift* tarjoaa ensimmäisen määritelmän relaation edeltämisrelaatiolle (engl. ”an ancestral of a relation”).

3. *Begriffsschriftissä* hyödynnettiin ensimmäistä kertaa materiaalista implikaatiota logisistisessä järjestelmässä (*mt.*, §5).

4. Loogisen funktion käsite on epäilyksettä yksi Fregen kuuluisimmista keksinnöistä. *Begriffsschriftissä* Frege vakiinnutti myös ajatuksen *n*-paikkaisista funktioista (*mt.*, §§ 9–10). Hän ei kuitenkaan ollut kovin kiinnostunut niistä eroista, joita vallitsee yksipaikkaisten ja kaksi- tai useampipaikkaisten funktioiden välillä, ja jotka liittyvät läheisesti ominaisuuksien ja relaatioiden välisiin eroihin.

Tässä yhteydessä on syytä huomata, että vaikka Fregen puhe funktioista monella tapaa poikkesikin hänen useimpien aikalaistensa funktiokäsityksistä, hän ei konstruoinut sitä joukko-opillisesti, kuten oli yleisesti tapana loogikkojen keskuudessa vielä jokin aika sitten.

Mainittakoon vielä, että Frege laajensi funktiokäsitystään entisestään kaksiosaisessa teoksessaan *Grundgesetze der Arithmetik*. Nämä uudet laajennukset sallivat mm. minkä hyvänsä hänen loogisen universuminsa objektin toimia funktion argumenttina. Ne myös koituivat hänen logisistisen ohjelmansa tuhoksi Russellin löytämän loogisen ristiriidan ansiosta (ks. Frege 1976, 211–215).

5. Kvanttorin käsitteen ja kvantifikaatioteorian keksiminen (Frege 1879, §11) on yksi *Begriffsschriftin* juhlituimmista uutuuksista vaikka kukaan kyseisen teoksen tuoreeltaan arvostelleista asiantuntijoista ei sitä heti huomannutkaan.

Usein kuulee huomautettavan, että kunnia kvantifikaatioteorian keksimisestä – tai jos haluatte, löytymisestä – ei kuulu yksin Fregelle vaan myös hänen amerikkalaiselle kollegalleen Charles Peircelle. Hilary Putnam on jopa väittänyt, että kvanttorikuninkaan kruunu ja valtikka kuuluisivat oikeasti Peircelle sekä hänen parhaille oppilailleen Christine Laddille ja Oscar Mitchellille (Putnam 1982, 297).

On toki totta, että Peirce saavutti omat tuloksensa tietämättä mitään Fregen vastaavista tuloksista. Tämä ei kuitenkaan muuta miksiäkään sitä tosiasiaa, että Frege sittenkin ehti ensin: Peirce merkitsi tuloksensa muistiin vasta 1880-luvun alkupuolella (Peirce 1933, §351ff., §393ff.). Kun lisäksi muistamme, että Peirce kvantifikaatioteoriaa koskevat jokseenkin hajanaiset tulokset tulivat tiedeyhteisön yleiseen tietoon vasta verrattoman paljon myöhemmin, Peirce kannattajien lohdutukseksi hänen voidaan sanoa päässeensä maaliin hyvänä kakkosena.

Tässä yhteydessä on myös paikallaan mainita Fregen selkeästä erottelusta propositionaalisen funktion käsitteen ja kvanttorin käsitteen välillä.

6. Useamman uutuuden summana *Begriffsschrift* tarjosi ensimmäisen aksiomaattis-deduktiivisen esityksen ensimmäisen (ja korkeamman) kertaluvun predikaattikalkyylista logisistisena järjestelmänä. Baker ja Hacker ovat sanoneet tätä saavutusta ”kaikkien aikojen kiistatta suurimmaksi edistysaskeleeksi” logiikan alalla (Baker & Hacker 1984, 11).

7. *Begriffsschrift* sisältää myös ensimmäisen esityksen nykyään klassisena lausekalkyylina tunnetusta järjestelmästä.

8. Bakerin ja Hackerin mukaan *Begriffsschriftin* varsinainen jymypaikka oli kuitenkin todistus sille, että matemaattisen induktion periaate on johdettavissa logiikan yleisistä laeista ja siten täysin riippumatta kokonaislukujen aritmetiikasta (*mt.*, 34).

Onpa myös väitetty, että Fregen alkuperäinen motiivi *Begriffsschriftin* kirjoittamiseksi oli juuri matemaattisen induktion tai rekursion looginen analyysi (*mt.*, 3).

9. Yksi *Begriffsschriftin* tärkeimmistä erotteluista oli selkeä erottelu aksiomien ja päättelysääntöjen välillä.

10. Terrell Bynum on laskenut *Begriffsschriftin* uutuuksien joukkoon myös totuustaulukkomenetelmän (Bynum 1972, 14).

Totuudenmukaisempaa on kuitenkin sanoa, että *Begriffsschriftissä* Frege ennakoï totuustaulukkomenetelmää ja hyödynsi sen perusajatusta, mutta ilman, että se olisi varsinaisesti ollut osa hänen järjestelmänsä.

Kuten Leila Haaparanta on kirjoittanut: ”Kun Frege konditionaalisuutta apunaan käyttäen rakentaa kompleksisia lauseita yksinkertaisista lauseista kaikki toimii hienosti ’totuustaulukoiden’ mukaisesti” (Haaparanta 1985, 40; korostus lisätty).

Totuustaulukoita piirtelivät ensimmäisten joukossa Emil Post (1921) ja Ludwig Wittgenstein (1922). Ivor Grattan-Guinness on kuitenkin huomauttanut, että Bertrand Russell

esitteli ne jo vuonna 1914 esitelmämatkallaan Harvardissa (Grattan-Guinness 2000, 422).

Volker Peckhaus on puolestaan osoittanut, että Ernst Zermelo määritteli loogisia operaattoreita totuustaulukoiden avulla jo niinkin varhain kuin vuonna 1908.

Ja jos luomme katsauksen myös Fregestä taaksepäin, voimme huomata, että jo George Boole ennakoï lausekonktiivien totuustaulukkoanalyysia ja että myös William Stanley Jevonsin ”loogisessa koneessa” (1870) on eräitä tuttuja piirteitä. Joka tapauksessa on selvää, että totuustaulukkomenetelmän käyttöönotto ei kuulu *Begriffsschriftin* uutuuksiin.

11. Kirjoituksessaan ”Ueber die wissenschaftliche Berechtigung einer Begriffsschrift” (1882) Frege kehui kaavakieltään muodollisesti niin ankaraksi symbolijärjestelmäksi, ettei siitä löydy mitään sijaa monimerkityksisyyksille (*mt.*, 52).

Tämä julistus joutuu outoon valoon kun huomaamme, että *Begriffsschriftissä* Frege käytännössä erottaa toisistaan neljä olla-verbin eri merkitystä: (i) identiteetti, joka formalisoidaan nykyisin $a = b$ (esim. ”Clark Kent on Teräsmies”); (ii) predikaatio $P(a)$ (esim. ”Teräsmies on supersankari”); (iii) olemassaolo $(\exists x)P(x)$ (esim. ”Ihminen on [olemassa]”); ja (iv) luokkainklusio $(\forall x)(x \in S \supset x \in P)$ (esim. ”Kulta on jalometalli”).

Tämä erottelu vastaa oletusta, jonka mukaan luonnollisissa kielissä esiintyvät olla-verbit ovat monimerkityksisiä. Frege ei lausu tätä teesiä selvin sanoin, mutta se käy ilmi hänen kaavakielestään. Russell sen sijaan muotoili sen selvästi ja täsmällisesti jo vuonna 1903 teoksessaan *The Principles of Mathematics*, ja niinpä se tunnetaankin nykyään Frege-Russell -monimerkityksisyyteen. Vaikka monet tutkijat ovat jättäneet tämän semanttisen uutuuden kokonaan huomiotta, muiden muassa Leila Haaparanta ja Jaakko Hintikka ovat korostaneet sen suurta merkitystä nykyaikaisen logiikan ja luonnollisten kielten semantiikan ymmärtämisen kannalta.

Modernin logiikan syntyhistorian kannalta on myös kiinnostavaa huomata, että vaikka tämä monimerkityksisyys oli hyvin tunnettu keskiajalla, se näyttää vaipuneen sadoiksi vuosiksi unholaan kunnes Frege ja eräät muut loogikot keksivät ottaa sen uudelleen käyttöönsä 1800-luvulla (ks. Vilkkio 2003).

12. On myös väitetty, että *Begriffsschrift* noudattaa erottelua objektikielen ja metakielen välillä siinä merkityksessä, että *Begriffsschrift* sallii ensimmäisen kertaluvun kalkyylin lisäksi myös toisen ja korkeampien kertalukujen kalkyyleja (ks. esim. Lesniewski 1927, 189).

On kuitenkin sekä anakronistista että väärin tulkita eri kertalukujen suhde samanlaiseksi kuin myöhemmin keksitty metakielen suhde objektikieleensä. Objektikielen ja metakielen välinen erottelu otettiin käyttöön vasta 1900-luvun taitteessa kun eräät todistusteoreetikot, kuten David Hilbert, kiinnostuivat erosta annetun formalisoidun kielen (tai objektikielen) ja sen formalisoimattoman metakielen (tai syntaksikielen) välillä sen erottelun yhteydessä, minkä he olivat löytäneet matematiikan ja metamatematiikan väliltä.

Russell puolestaan pohdiskeli ajatusta kielten hierarkioista esipuheessa, jonka hän kirjoitti Wittgensteinin *Traktatukseen* (Russell 1922, xxii). Vähän myöhemmin, 1930-luvulla, Alfred Tarski vakiinnutti ajatuksen metakielestä nykyisessä merkityksessään, jonka mukaan metakieli on kieli, jolla

voidaan ilmaista aksiomaattinen tai muulla tavoin systemaattinen semanttinen kuvaus annetusta objektikielestä. Frege ei pyrkinyt antamaan kaavakielelle semanttista tulkintaa missään muussa kielessä, eikä hän missään yhteydessä käsitellyt metakielen mahdollisuutta ja problematiikkaa. Tässä yhteydessä on myös korostettava, ettei Frege juuri osoittanut kiinnostusta metamatemaattisiin kysymyksiin. Hänen kaavakielensä oli tarkoitettu käytettäväksi eikä analysoitavaksi.

Näiden uutuuksien suuri merkitys oivallettiin vasta 1900-luvun puolella ja on paljolti Russellin ansiota, että Fregen saavutukset tulivat suuren matematiikan ja logiikan perusteista kiinnostuneen yleisön tietoisuuteen niinkin pian. On kiinnostavaa pohtia, milloin Fregen läpimurrot olisi havaittu jos ne olisivat jääneet Russellilta huomaamatta. Joka tapauksessa Russellkin sai ilmeisesti ensikosketuksensa Fregen kirjoituksiin vasta vuonna 1902. Jos näin ei olisi käynyt, Fregen ja Wittgensteinin tiet olisivat esimerkiksi tuskin koskaan kohdanneet.

Korostettakoon kuitenkin, että vaikka Russellilla oli kansainvälisillä kentillä (muiden ansioidensa ohessa) huomattavan tärkeä rooli Fregen tulosten markkinamiehenä, on järjenvastaista kuvitella, etteikö yksikään varteenotettava oppinut olisi tuntenut *Begriffsschriftiä* jo hyvissä ajoin ennen vuosisadan vaihdetta. Välittömästi ilmestymisensä jälkeen *Begriffsschrift* arvosteltiin kaikkiaan kahdeksassa tieteellisessä lehdessä sekä Saksassa että ulkomailla. Arvostelijoiden joukossa oli mm. sellaisia aikansa johtavia kansainvälisiä asian tuntijoita kuten Ernst Schröder ja John Venn. Mielestäni tämä ei ole aivan huono saalis jokseenkin tuntemattoman maalaismatematiikan ensimmäiselle väitöskirjan jälkeiselle monografialle.

Vaikka yksikään näistä arvostelijoista ei kieltämättä täysin ymmärtänyt *Begriffsschriftin* suurta merkitystä logiikan kehityksen kannalta, ei ainakaan voi väittää, etteikö juuri kukaan olisi sitä noteerannut. Lisäksi tieteen historiassa ei ole ollut aivan tavatonta, että tiedeyhteisöltä menee suurten uudistusten tunnistamiseen ja hyväksymiseen vuosi jos toinenkin. (Ks. Vilkkö 1998.)

Tieteen ja matematiikan historiassa on monta kertaa sattunut, että useampi tieteentekijä päätyy tutkimuksissaan samoihin läpimurtoihin toisistaan riippumatta kokolailla samanaikaisesti. Leibnizin ja Newtonin kiista infinitesimaalilaskennan keksijän kunniaista on yksi hyvä esimerkki. Myös deontisella logiikalla on kaksi keksijäänsä: G. H. von Wright ja Jerzy Kalinowski päätyivät toisistaan tietämättä samoihin perustuloksiin 1950-luvun alussa. Vastaavaan tapaan Charles Peirce oivalsi kvantifikaatioteorian ilmaisuvoiman omin päin vain muutama vuosi Fregen jälkeen.

Näin ollen tuntuu turvalliselta olla samaa mieltä Bakerin ja Hackerin kanssa heidän todetessaan, että ”jos Frege ei olisi tehnyt ratkaisevaa läpimurtoa vuonna 1879, toiset olisivat saavuttaneet sen samaa reittiä seuraten vielä hänen elinajanaan (eikä kukaan olisi pystynyt siihen merkittävästi aikaisemmin)” (Baker & Hacker 1984, 16).

Lähteet

- Baker, Gordon & Peter Hacker, *Frege: Logical Excavations*. Blackwell, Oxford 1984.
 Berka, Karel & Lothar Kreiser (toim.), *Logik-Texte. Kommentierte Auswahl zur Geschichte der modernen Logik*. Akademie-Verlag, Berlin 1971.
 Bocheski, Joseph, *Formale Logik*. Karl Alber, Freiburg/München 1956.

- Bynum, Terrell W., On the Life and Work of Gottlob Frege ja Editor's Introduction. Teoksessa Frege 1972, 1–80.
 Dummett, Michael, *Frege: The Philosophy of Language*. Duckworth, London 1973.
 Dummett, Michael, *Frege: Philosophy of Mathematics*. Duckworth, London 1991.
 Frege, Gottlob, *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*. Nebert, Halle a.S. 1879.
 Frege, Gottlob, Ueber die wissenschaftliche Berechtigung einer Begriffsschrift. *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik* (Neue Folge) 81, 1882, 48–56.
 Frege, Gottlob, *Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*. Wilhelm Koebner, Breslau 1884.
 Frege, Gottlob, *Grundgesetze der Arithmetik. Begriffsschriftlich abgeleitet*, Bde. 1-2. Hermann Pohle, Jena 1893/1903.
 Frege, Gottlob, *Conceptual Notation and Related Articles*. Toimittanut Terrell Bynum. Clarendon Press, Oxford 1972.
 Frege, Gottlob, *Wissenschaftlicher Briefwechsel*. Toimittaneet Gottfried Gabriel, Hans Hermes, Friedrich Kambartel, Christian Thiel ja Albert Veraart. Felix Meiner, Hamburg 1976.
 Grattan-Guinness, Ivor, *The Search for the Mathematical Roots 1870–1940. Logics, Set Theories and the Foundations of Mathematics from Cantor Through Russell to Gödel*. Princeton University Press, Princeton & Oxford 2000.
 Haaparanta, Leila, *Frege's Doctrine of Being (=Acta Philosophica Fennica; 39)*. Suomen Filosofinen Yhdistys, Helsinki 1985.
 Kant, Immanuel, *Critik der reinen Vernunft. Zweyte hin und wieder verbesserte Auflage*. Hartknoch, Riika 1787. Uusi painos *Akademie-Ausgabe*, Vol. 3.
 Lesniewski, Stanislaw, O podstawach matematyki I. *Przegląd Filozoficzny* 30, 1927, 164–206. Englanniksi (On the Foundations of Mathematics I) teoksessa Lesniewski, *Collected Works*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht & PWN, Varsova 1992, 174–192.
 Peckhaus, Volker, 19th Century Logic Between Philosophy and Mathematics. *The Bulletin of Symbolic Logic* 5, 1999, 433–450.
 Peirce, Charles S., *Collected Papers of Charles Sanders Peirce, vol. 3, Exact Logic (Published Papers)*. Harvard University Press, Cambridge, Mass. 1933.
 Post, Emil, Introduction to a General Theory of Elementary Propositions. *American Journal of Mathematics* 43, 1921, 163–185.
 Putnam, Hilary, Peirce the Logician. *Historia Mathematica* 9, 1982, 290–301.
 Russell, Bertrand, *The Principles of Mathematics*. The University Press, Cambridge 1903.
 Russell, Bertrand, Introduction. Teoksessa Wittgenstein 1922, ix–xxii.
 Sluga, Hans, *Gottlob Frege*. Routledge & Kegan Paul, Lontoo 1980.
 Vilkkö, Risto, The Reception of Frege's *Begriffsschrift*, *Historia Mathematica* 25, 1998, 412–422.
 Vilkkö, Risto, *A Hundred Years of Logical Investigations. Reform Efforts of Logic in Germany, 1781–1879*. Mentis, Paderborn 2002.
 Vilkkö, Risto, Immanuel Kant – logiikan kehityksen tärkeä taustavaikuttaja. *Ajatus* 60, 2003, 121–136.
 Wittgenstein, Ludwig, *Tractatus Logico-Philosophicus*. Routledge & Kegan Paul, Lontoo 1922.