Panu Raatikainen

Formalismin rajat

Nykyaikaisen formaalisen logiikan kehityksen alkutaivalta leimasivat kunnianhimoiset tavoitteet ja vahva optimismi. Tavoitteena oli osoittaa koko matematiikalle ehdottoman varma perusta. Parhaimmillaan filosofian ongelmienkin uskottiin ratkeavan formaalisen logiikan avulla. Filosofisesti kuitenkin on mielenkiintoisinta, että nykyaikainen formaalinen logiikka on mahdollistanut formaalisen lähestymistavan rajoitusten kiistattoman ja matemaattisen täsmällisen osoittamisen. Tämäntyyppisillä tuloksilla on monia tärkeitä filosofisia seurauksia. Esittelen tässä artikkelissa näitä keskeisiä logiikan rajoittavia tuloksia.

Filosofian historiassa Aristoteleen logiikkaa pidettiin pitkään lopullisena totuutena pätevän loogisen päättelyn teoriassa. Perinteisen aristoteelisen logiikan valtakausi kesti parisen tuhatta vuotta. Niinpä vielä Kant julisti, että aristoteelinen logiikka on täydellinen järjestelmä, jossa ei ole mitään korjattavaa. Sittemmin logiikka on kuitenkin kokenut valtaisan mullistuksen. Nykyinen predikaattilogiikka on radikaalisti perinteistä logiikkaa ilmaisuvoimaisempi[1]. Sen luominen on paljolti yhden miehen, saksalaisen Gottlob Fregen ansiota. Hän esitti uuden logiikan perusajatukset pienessä kirjassaan *Begriffsschrift* vuonna 1879.

Frege halusi osoittaa, että lukuteorian (eli aritmetiikan) totuudet eivät ole synteettisiä *a priori*, kuten Kant oli väittänyt, vaan analyyttisia *a priori*. Frege nähtävästi kuitenkin piti itseään laajasti ottaen kantilaisena, ja hänen varsinaisena päätavoitteenaan oli osoittaa hänen aikanaan suosittuja empiristisiä ja naturalistisia suuntauksia vastaan, ettei kaikki tieto ole aposteriorista vaan että (kuten Kantkin ajatteli) on olemassa *a priori* tietoa – nimittäin tietomme lukuteoriasta (geometrisiä totuuksia Frege piti Kantin tavoin synteettisinä *a priori*).

Frege pyrki osoittamaan lukuteorian totuuksien analyyttisyyden osoittamalla, että ne voidaan itse asiassa palauttaa loogisiin totuuksiin. Tätä Lebnizista juontuvaa matematiikanfilosofista kantaa on tapana kutsua logisismiksi. Se, että Frege tuli kehittäneeksi nykyaikaisen predikaattilogiikan, oli oikeastaan vain tämän filosofisen projektin sivutuote. Fregelle kävi nimittäin ilmeiseksi, että perinteinen aristoteelinen logiikka oli aivan riittämätön esittämään matematiikassa esiintyviä intuitiivisesti päteviä päätelmiä.

Fregen logisistinen projekti törmäsi ylitsepääsemättömiin vaikeuksiin. Englantilainen Bertrand Russell osoitti vuonna 1902, että Fregen suuri looginen järjestelmä johtaa ristiriitoihin (erityisesti nk. Russellin paradoksi). Russell kuitenkin hyväksyi logisismin perusajatuksen ja jopa laajensi sen koskemaan koko matematiikkaa, myös geometriaa. Toisin kuin Frege, Russell suhtautui Kantiin melko penseästi ja katsoi, että logisismin oletettu pätevyys osoittaa Kantin olleen perustavasti väärässä.

Ristiriitojen välttämiseksi Russell pyrki kehittämään paradokseista vapaan yleisen logiikan, jota hän alkoi kutsua *tyyppiteoriaksi*. Siinä käsitteillä on oma rajattu mielekkyysalueensa (”tyyppi”), ja tunnetut paradoksit ovat kieliopin vastaisia. Russellin yritys palauttaa matematiikka logiikkaan huipentui tämän yhdessä A.N. Whiteheadin kanssa kirjoittamaan monumentaaliseen, kolmiosaiseen teokseen *Principia Mathematica* (1910-1913). Kävi kuitenkin ilmi, että olemassa olevan matematiikan palauttaminen tyyppiteoriaan edellytti erinäisiä lisäaksioomia, nimittäin valinta-aksiooman, äärettömyysaksiooman ja nk. palautuvuusaksiooman. Se, että nämä olisivat loogisia totuuksia, on kuitenkin vähintäänkin kiistanalaista. Pahempaa oli kuitenkin tulossa…

Kuvamanipulaatiot: Antti Nikkanen

Hilbertin ohjelma

Fregen ja Russellin logisismin ohella toinen nykyaikaisen logiikan kehityksen kannalta merkittävä lähestymistapa matematiikan perusteiden tutkimuksessa on ollut nk. Hilbertin ohjelma. Saksalainen David Hilbert oli 1900-luvun alkuvuosikymmenien matematiikan suuri voimahahmo, jonka ympärille ryhmittyi kokonainen koulukunta johtavia nuoren polven matemaatikkoja ja loogikoita.

1800-luvun loppupuolella matematiikassa oli kehittynyt radikaali uusi suuntaus, joukko-oppi, joka puhui estottomasti myös äärettömistä joukoista.

Monet pitivät tätä skandaalina, sillä Aristoteleesta 1800-luvulle lähes universaalinen näkemys filosofien ja matemaatikkojen keskuudessa oli ollut, että äärettömän joukon käsite on mieletön eikä mitään ääretöntä voi olla olemassa. Joukko-oppiin liittyvien erinäisten paradoksien (mm. Russellin paradoksi) löytymisen (erityisesti suunnilleen vuosina 1895-1905) katsottiin myös osaltaan osoittavan tämän.

Hilbert nousi puolustamaan äärettömien joukko-opillisten menetelmien käyttöä matematiikassa. Itse asiassa myöskään Hilbert ei uskonut äärettömien joukkojen olemassaoloon. Hän kuitenkin uskoi, että niiden käyttö matematiikassa on vaaratonta ja käytännön kannalta hyödyllistä. Hilbert piti äärettömiä joukkoja kantilaisittain puhtaan järjen regulatiivisina ideoina.

Hilbert erotti toisistaan äärellisen ja äärettömän matematiikan. Edellinen rajoittui luonnollisia lukuja koskevaan alkeislukuteoriaan, kun taas jälkimmäinen piti sisällään kaiken matematiikan mukaan lukien äärettömän joukko-opin. Toiseksi, Hilbert erotti toisistaan reaalilauseet ja ideaalilauseet. Hän uskoi, että vain reaalilauseet ovat merkityksellisiä ja puhuvat jostain todellisesta. Sellaisia ovat (suunnilleen) luonnollisten lukujen teorian kvanttorittomat kaavat ja sellaisten universaaliset sulkeumat. Kaikki muut lauseet ovat ideaalilauseita, jotka eivät puhu mistään todellisesta. Hilbertin mukaan ne kuitenkin nopeuttavat laskutoimituksia sekä täydentävät ja yksinkertaistavat formalismia. Vain ne lisäämällä on mahdollista säilyttää klassisen logiikan lait (esim. kolmannen poissuljetun laki) myös matematiikan alueella, Hilbert ajatteli.

Hilbertin ohjelma matematiikan perusteiden turvaamiseksi oli seuraava: Ensiksi, koko ääretön matematiikka tuli formalisoida Fregen ja Russellin kehittämän uuden logiikan avulla. Formalisoituna sen lauseita ja todistuksia voidaan tarkastella ulkoapäin, metatasolla, pelkkinä äärellisinä merkkijonoina. Hilbert itse kutsuikin ohjelmaansa todistusteoriaksi tai metamatematiikaksi. Toiseksi, käyttämällä vain rajoitettua ja kiistan kaikkien osapuolten (myös joukko-opin arvostelijoiden) hyväksymää äärellistä matematiikkaa, olisi todistettava suuren formalisoidun järjestelmän ristiriidattomuus sekä se, ettei ääretön matematiikka todista yhtään merkityksellistä reaalilausetta, joka ei olisi jo todistuva äärellisessä matematiikassa (nk. konservatiivisuus). Tämä takaisi äärettömien joukko-opillisten menetelmien käytön turvallisuuden ja luotettavuuden äärellisen matematiikan näkökulmasta.

Hilbert myös julisti, ettei mitään ratkaisemattomia ongelmia ole olemassa. Tässä hän nojasi kantilaiseen ajatukseen, että olisi irrationaalista, jos Järki voisi esittää kysymyksiä, joihin se ei kuitenkaan voisi vastata. Hilbertin mukaansa täytyy olla mahdollista esittää sellainen menetelmä, joukko täsmällisiä sääntöjä, joita täysin mekaanisesti soveltamalla mikä tahansa matemaattinen ongelma ratkeaa – tämä on Hilbertin kuuluisa ”ratkaisuongelma”, ’Entscheidungsproblem’.

Hilbertin ohjelman piirissä saavutettiin 1920-luvulla erilaisia osittaisia tuloksia, ja se vaikutti merkittävästi logiikan kehitykseen. Hilbertin ajatus, että formalisoituja loogisia järjestelmiä itseään tutkitaan matemaattisesti metatasolla, oli erityisen merkittävä. Fregelle ja Russellille logiikka oli ennen kaikkea universaalinen väline, jota käytetään. Hilbert ja hänen koulukuntansa sen sijaan tutki logiikan ominaisuuksia metatasolla ja keskitti huomionsa formalisoitujen järjestelmien metaloogisiin ominaisuuksiin kuten ristiriidattomuus, luotettavuus, täydellisyys ja ratkeavuus. Varsinaiselle Hilbertin ohjelmalle kävi kuitenkin huonosti.

Gödelin epätäydellisyyslauseet

Kurt Gödel oli nuori itävaltalainen loogikko, joka yleensä luetaan Wienin piirin jäseneksi, vaikka todellisuudessa hänen filosofiset näkemyksensä poikkesivat jyrkästi loogisen positivismin opeista. Vuonna 1930 tuolloin vasta 24-vuotias Gödel todisti loogisia tuloksia, jotka muuttivat perustavasti ja lopullisesti käsityksemme logiikasta, formaalisista menetelmistä ja matematiikan perusteista.

On tullut tavaksi puhua Gödelin ensimmäisestä ja toisesta epätäydellisyyslauseesta. Ensiksi, hän todisti, että jopa mahtavassa *Principia Mathematican* teoriassa on sen kielessä ilmaistavia yksinkertaisia lukuteoreettisia lauseita, jotka ovat tosia, mutta joita ei voida todistaa tässä teoriassa.

Toiseksi, Gödel osoitti, että erityisesti lausetta, joka sanoo, että kyseinen teoria on ristiriidaton, ei voida todistaa tässä teoriassa. Nämä tulokset jo itsessään asettivat kyseenalaiseksi sekä logisismin että Hilbertin ohjelman. Kaikki matemaattiset totuudet eivät sisältyneet logiikkaan ainakaan kuten Russell logiikan määritteli. Ja jos äärettömän matematiikan sisältävän *Pricipian* teorian ristiriidattomuutta ei voida todistaa edes siinä itsessään, niin kuinka paljon vähemmän Hilbertin rajoitetussa äärellisessä matematiikassa.

Nekin harvat, jotka ymmärsivät tulokset – mukaan lukien Gödel itse – olivat kuitenkin epävarmoja siitä, voitaisiinko epätäydellisyystulokset yleistää ja miten. Gödel itse totesi, että todistusmenetelmä mahdollistaa myös Zermelon, Fraenkelin ja von Neumannin joukko-oppien ja Hilbertin koulukunnan esittämien lukuteorian formalisointien epätäydellisyyden todistamisen. Ilman yleistä ja täsmällistä ratkaisumenetelmän käsitteen määritelmää epätäydellisyystuloksia ei kuitenkaan voida yleistää. Tämä ongelma on suorassa yhteydessä Hilbertin ratkaisuongelmaan. Gödel itse teki 1930-luvun alussa joitain osittaisia yrityksiä ratkaisumenetelmän käsitteen määrittelemiseksi, mutta syystä tai toisesta hän vaipui ankaraan masennukseen ja vietti vuodet 1934-1937 suurimmaksi osaksi hermoparantolassa, eikä enää osallistunut aiheen tutkimukseen.

Ratkaisumenetelmän käsite

Ratkaisumenetelmän tai laskentamenetelmän – tai algoritmin, kuten sitä usein kutsutaan – käsite on yhtä vanha kuin matematiikka itse. Matematiikassa on aina esitetty ratkaisu- tai laskentamenetelmiä tiettyjen yksittäisten ongelmien ratkaisemiseksi. Klassinen esimerkki on nk. Eukleideen algoritmi kahden luvun suurimman yhteisen tekijän ratkaisemiseksi. Laskentamenetelmät olivat keskeisessä asemassa esimerkiksi Leibnizin ajattelussa. Hilbert ja Ackermann kutsuivat vuonna 1928 ilmestyneessä logiikan oppikirjassaan predikaattilogiikan ratkaisuongelmaa ”matemaattisen logiikan pääongelmaksi”. He olettivat, että predikaattilogiikalle voidaan esittää yleinen ratkaisumenetelmä, jonka avulla mistä tahansa lauseesta voidaan mekaanisesti ratkaista, onko se loogisesti pätevä vai ei. Tämä antaisi myös ratkaisumenetelmän kaikille predikaattilogiikan avulla formalisoiduille matemaattisille aksiomatisoiduille teorioille.

Ratkaisumenetelmän esittämiseksi yksittäiselle matemaattiselle ongelmalle ja myös Hilbertin peräänkuuluttamalle logiikan ratkaisuongelmalle riittää, että esittää jonkun yksittäisen, konkreettisen ratkaisu- tai laskentamenetelmän, joka vastaa intuitiivista ratkaisumenetelmän käsitettä. Kielteinen vastaus eli se johtopäätös, ettei mitään ratkaisumenetelmää jollekin ongelmalle ole olemassakaan, olisi sitä vastoin edellyttänyt yleisen ratkaisumenetelmän käsitteen täsmällistä matemaattista määritelmää. Tällaista ei tuolloin kuitenkaan ollut olemassa, eikä tämän intuitiivisen ja epäformaalisen käsitteen täsmällistä matemaattista määrittelyä pidetty edes mahdollisena.

Church ja Turing

Amerikkalainen loogikko Alonzo Church kehitti 1930-luvun alussa omaan λ-notaatioonsa perustuvaa järjestelmää matematiikan perusteiksi. Hänen oppilaansa Kleene ja Rosser todistivat vuonna 1934, että järjestelmä on ristiriitainen. Hieman kuin vahingossa siitä jäi kuitenkin jäljelle λ-määriteltävyyden käsite, jolla osoittautui olevan monia käteviä ominaisuuksia. Vielä samana vuonna Church esitti, että intuitiivinen laskettavien funktioiden käsite voidaan samastaa λ-määriteltävien funktioiden kanssa. Tätä ajatusta kutsutaan nykyään Churchin teesiksi.

Teesin valtava merkitys ymmärrettiin pian; mahdollistihan se lopultakin ratkaisuongelman yleisen tarkastelun. Church julkaisi teesinsä vuonna 1936 ja todisti siihen nojaten sekä predikaattilogiikan että lukuteorian ratkeamattomaksi: ei ole olemassa mitään yleistä mekaanista menetelmää, jonka avulla voitaisiin ratkaista, onko mielivaltainen annettu lause todistettavissa lukuteoriassa, tai predikaattilogiikassa, vai ei. Churchilla ei ollut kuitenkaan esittää mitään kovin kestävää argumenttia tai analyysia teesinsä tueksi. Muuan muassa Gödel suhtautui teesiin hyvin epäillen.

Nuori englantilainen matematiikko Alan Turing kuunteli vuonna 1935 Cambridgessa M.H.A. Newmanin luentoja, joilla käsiteltiin myös Gödelin tulosta sekä tuolloin avoinna ollutta ratkaisuongelmaa. Turing innostui aiheesta ja työskenteli sen parissa omatoimisesti. Vuotta myöhemmin tuolloin vasta 23-vuotias Turing yllätti Newmanin tuomalla tälle kirjoituksen, jossa esitettiin idealisoidun koneen määritelmä ja tähän ratkaisumenetelmän analyysiin perustuen osoitettiin – Churchin työstä riippumattomasti – predikaattilogiikan ratkeamattomuus.

Turingin työn tarkoituksena oli alun perinkin juuri logiikan ratkeamattomuuden todistaminen. Ratkaisumenetelmän käsitteen analyysissaan hän tarkasteli ensin ihmisten laskentamenetelmiä seuraamalla ihmisten suorittamia laskutoimituksia ja abstrahoi kaikki epäolennaiset rajoitukset pois.

Turingin analyysi lähtee liikkeelle siitä, kuinka ihminen – inhimillinen ”Laskija” – toimii ratkaistessaan jotain matemaattista ongelmaa jonkin mekaanisen ratkaisumenetelmän avulla. Turingin mukaan todellinen ongelma on se, mitä mahdollisia prosesseja ihmismieli voi viedä läpi laskiessaan jotain lukua. Hän halusi löytää sellaiset Laskijan operaatiot, jotka ovat niin yksinkertaisia ja perustavia, ettei niitä voida enää jakaa yksinkertaisempiin osiin.

Turing kuvitteli, kuinka Laskija kirjoittaa symboleja ruutuihin jaetulle paperille samaan tapaan kuin lapsi laskentovihkoon. Hän päätteli, että paperin kaksiulotteisuus ei ole olennaista, joten hän yksinkertaisti asetelmaa keskittymällä yksiulotteiseen paperinauhaan, joka oli jaettu ruutuihin. Edelleen Turing totesi, että inhimillinen muisti ja havaintokyky on välttämättä äärellinen: siispä käytössä voi olla vain äärellisen monta eri perussymbolia, ja Laskija voi ”kertasilmäyksellä” havaita symboleja vain äärellisen monesta ruudusta.

Turingin analyysin lopputuloksena oli ajatus abstraktista, idealisoidusta koneesta, jossa on potentiaalisesti ääretön, ruutuihin jaettu nauha, jota kone lukee, johon se kirjoittaa ja josta se pyyhkii pois merkkejä jonkin äärellisen sääntöjoukon määräämänä. Tällaisia teoreettisia koneita kutsutaan nykyisin Turing-koneiksi. Turingin johtopäätös oli, että ongelma on mekaanisesti ratkaistavissa inhimilliselle Laskijalle täsmälleen silloin, kun jokin Turing-kone voisi ratkaista sen.

Vakuuttavan käsiteanalyysin avulla Turing onnistui eristämään ja täsmällisesti määrittelemään yleisen ratkaisumenetelmän käsitteen. Seuraavaksi hän osoitti määritelmän avulla, että on olemassa matemaattisia ongelmia, joita ei kerta kaikkiaan voida ratkaista: ei ole mitään yleistä mekaanista menetelmää niiden ratkaisemiseksi. Ehkä yksinkertaisin tällainen ongelma on Turingin ”pysähtymisongelma”: ei ole mitään yleistä menetelmää sen ratkaisemiseksi, pysähtyykö tietyn tietokoneen laskenta joskus vai juuttuko kone ”silmukkaan” ikuisiksi ajoiksi. Turing myös osoitti, että predikaattilogiikka on ratkeamaton: jos se olisi ratkeava, myös pysähtymisongelma, joka voidaan formalisoida predikaattilogiikassa, olisi ratkeava.

Vasta kun Turingin artikkeli oli painovalmis, Churchin työ tuli hänen tietoonsa. Turing lisäsi artikkeliinsa liitteen, jossa hän osoitti Turing-laskettavuuden (kuten sitä nykyisin kutsutaan) ja λ-määriteltävyyden yhtäpitäviksi. Turingin analyysi osoitti siis myös, että Church teeseineen oli siis sittenkin ollut oikeassa. Turing julkaisi artikkelinsa vielä vuonna 1936.

Turingin tärkeän panoksen takia intuitiivisen ratkaisumenetelmän käsitteen ja täsmällisen matemaattisen määritelmän (jonkin monista ekvivalenteista mahdollisista määritelmistä) samastamista kutsutaan usein myös Churchin-Turingin teesiksi. Se on nykyään yleisesti hyväksytty loogikoiden keskuudessa, ja monien tärkeiden loogisten tulosten perusta. Myös Gödel vakuuttui Turingin analyysista.

Epätäydellisyystulosten yleistäminen

Turingin analyysi mahdollistaa myös Gödelin epätäydellisyystulosten yleistämisen.

Sen avulla voidaan määritellä yleinen formalisoidun teorian käsite. Formalisoidun teorian määrittelyssä on kolme osaa: Ensiksi, on määriteltävä käytetty formaalinen *kieli*, sen merkit, eli aakkosto, ja lauseenmuodostussäännöt (kielioppi). Säännöt ovat laskettavia operaatioita, ja kysymyksen, onko annettu merkkijono oikeinmuodostettu lause vai ei, on oltava mekaanisesti ratkaistavissa. Toiseksi, on määriteltävä teorian peruslauseet eli *aksioomat*. Aksioomia voi olla ääretön määrä, mutta pitää olla mahdollista ratkaista mekaanisesti, onko annettu lause aksiooma vai ei. Kolmanneksi, on määriteltävä *päättelysäännöt*. Ne ovat laskettavia operaatioita lauseiden joukossa. Toisin sanoen täyttyy olla mahdollista ratkaista mekaanisesti, onko oletettu päätelmä päättelysääntöjen mukainen vai ei. Formalisoidun teorian todistuvat lauseet eli *teoreemat* ovat kaikki aksioomista päättelysääntöjen avulla johdettavissa olevat lauseet (aksioomat itse mukaan luettuna).

Tämän yleisen formalisoidun teorian käsitteen avulla voidaan sitten esittää myös Gödelin epätäydellisyystulokset täysin yleisessä muodossa:

Gödelin epätäydellisyyslauseet (yleinen muoto)

Ensimmäinen epätäydellisyyslause: Jokaiselle ristiriidattomalle formalisoidulle teorialle, joka sisältää alkeislukuteorian, voidaan löytää teorian kieleen kuuluva lause, joka on tosi mutta jota ei voi todistaa teoriassa.

Toinen epätäydellisyyslause: Mikään ristiriidaton formalisoitu teoria ei voi todistaa omaa ristiriidattomuuttaan.

Kun Gödelin epätäydellisyystulokset nykyisin esitetään tällä tavalla, oletetaan niissä siis piilevästi Turingin ratkeavuuden analyysi.

Totuuden määrittelemättömyys

Puolalainen loogikko Alfred Tarski tunnetaan filosofiassa ennen kaikkea tämän totuuden käsitteelle antamasta loogismatemaattisesta analyysista. Hän esitti, kuinka formaaliselle kielelle voidaan esittää täsmällinen totuusmääritelmä. Tarski kuitenkin myös todisti vuonna 1933 Gödelin epätäydellisyystuloksien menetelmiä soveltamalla mielenkiintoisen totuuden käsitteeseen liittyvän rajoittavuustuloksen (itse asiassa Gödel oli tehnyt saman huomion, muttei julkaissut sitä). Nimittäin, tiettyjen varsin luonnollisten taustaoletusten vallitessa pätee:

Tarskin totuuden määrittelemättömyystulos: Formaalisen kielen totuuden käsitettä ei voida määritellä tämän kielen sisällä.

Tarski erottikin toisistaan objektikielen eli kielen, jonka totuudesta on kyse, ja metakielen jossa objektikielen totuutta käsitellään. Tarskin tulos osoittaa, että totuuden määrittelemiseksi tarvitaan välttämättä objektikieltä ilmaisuvoimaltaan rikkaampi metakieli.

Tulosten filosofisesta merkityksestä

Gödelin tuloksilla (yhdistettynä Turingin työhön) voidaan tulkita olevan myös yleisempää tietoteoreettista merkitystä.[2]

Quine on tarkastellut niiden yhteyttä perinteisiin filosofisiin koulukuntiin: rationalistit ajattelivat, että kaikki totuudet voidaan todentaa lähtemällä itsestään selvistä peruslauseista itsestään selvien päättelyaskelten avulla. Monet maltillisemmat klassiset filosofit ajattelivat, että kaikki totuudet voidaan johtaa itsestään selvien päättelyaskelten avulla joko havainnoista tai itsestään selvistä totuuksista. Quine toteaa, että Gödelin tulokset kumoavat molemmat näkemykset.

Hilary Putnam puolestaan on esittänyt, että lauseiden, jotka voidaan todistaa meille ihmisille ilmeisien aksioomien pohjalta, täytyy sisältyä johonkin formalisoituun teoriaan, sillä muuten äärettömän määrän toisistaan täysin riippumattomia periaatteita täytyi olla ilmeisiä ihmismielelle – ja tämä tuntuu erittäin epäuskottavalta.

Gödelin tuloksista seuraa, että on olemassa matemaattisia totuuksia, joita ei voida todistaa ilmeisistä aksioomista. Edelleen, jos ”analyyttiset totuudet” ymmärretään jonkin äärellisen merkityspostulaattien luettelon seurauksina, Gödelin tuloksista seuraa, että matematiikassa on synteettisiä totuuksia. Itse asiassa myös Gödel itse esitti hyvin samantapaisen ajatuksen.

Ratkeamattomuustulokset ja tavallinen matematiikka

Gödelin konstruoimat ratkeamattomat lauseet ja Turingin ratkeamattomat ongelmat olivat kuitenkin hyvin monimutkaisia teoreettisia rakennelmia, jotka oli muotoiltu juuri epätäydellisyys- ja ratkeamattomuustulosten todistamiseksi. Niillä ei ollut mitään luonnollista matemaattista merkityssisältöä. Siksi pidettiin pitkään epäselvänä, onko tuloksilla loppujen lopuksi kovinkaan suurta merkitystä tavallisen matematiikan näkökulmasta. Asiaan on kuitenkin saatu lisävalaistusta.

Mitä tulee epätäydellisyystuloksiin, Jeff Paris ja Leo Harrington osoittivat vuonna 1978, että tietty hyvin luonnollinen äärellisen kombinatoriikan lause on todistumaton normaalissa lukuteoriassa (nk. Peano-aritmetiikka) – se voidaan kyllä todistaa vahvemmassa joukko-opin teoriassa. Myöhemmin Harvey Friedman on muotoillut varsin yksinkertaisia ja luonnollisia matemaattisia lauseita, joita ei voi todistaa edes kattavissa joukko-opin teorioissa.

Hilbert oli kuuluisassa vuonna 1900 esittämässään luettelossa tärkeimmistä matematiikan avoimista ongelmista esittänyt kymmenentenä ongelmana nk. diofanttisten yhtälöiden ratkaisuongelman (nimitys juontaa juurensa antiikin kreikkalaisesta matematiikosta Diofantoksesta). Diofanttiset yhtälöt ovat yksikertaisesti yhtälöitä, jotka muodostetaan kokonaislukuja sekä yhteenlasku- ja kertolaskuoperaatioita yhdistämällä ja joiden mahdolliset ratkaisut rajoitetaan kokonaislukujen joukkoon. Hilbertin kymmenes ongelma siis peräänkuuluttaa yleistä menetelmää, jota seuraamalla voitaisiin mistä tahansa tällaisesta yhtälöstä ratkaista, onko sillä ratkaisua kokonaislukujen joukossa vai ei.

Turingin luomat välineet mahdollistivat kysymyksen siitä, voisiko tämä ongelma ehkä ollakin ratkeamaton. 1950-luvun alussa kaksi nuorta amerikkalaista loogikkoa, Julia Robinson ja Martin Davis, alkoivat aluksi toisistaan riippumatta, myöhemmin yhteistyössä, tutkia asiaa. Myöhemmin joukkoon liittyi filosofina mainetta niittänyt Hilary Putnam. He kutsuivat "eksponentiaalisiksi diofanttisiksi yhtälöiksi" yhtälöitä, joiden muodostamisessa voidaan yhteen- ja kertolaskun lisäksi käyttää myös eksponenttioperaatiota. Vuonna 1962 Davis, Putnam ja Robinson saavuttivat tärkeän tuloksen: he osoittivat, että kysymykseen eksponentiaalisten diofanttisten yhtälöiden kokonaislukuratkaisuista ei ole olemassa ratkaisumenetelmää. Näin hyvin luonnollinen lukuteoreettinen ongelma – ongelma jonka koululainenkin ymmärtää – oli osoitettu absoluuttisesti ratkeamattomaksi. Vuonna 1970 tuolloin vasta 22-vuotias venäläinen matemaatikko Juri Matjasevitš lisäsi viimeisen puuttuvan palasen ja todisti, että myös kysymys tavallisten diofanttisten yhtälöiden ratkaisuista, eli Hilbertin kuuluisa kymmenes ongelma, on ratkeamaton.

Ratkaisumenetelmiä laajentamassa

Voidaan kysyä, voisiko ratkaisumenetelmien käsitettä jotenkin yleistää niin, että Turingin analyysin nojalla ratkeamattomiksi tuomitut ongelmat voitaisiin ratkaista – ainakin jossain heikommassa mielessä. On todellakin olemassa eräs luonteva ja mielenkiintoinen ratkeavuuden käsitteen yleistys.

Hilary Putnam esitti vuonna 1965 ajatuksen "yrityksen ja erehdyksen menetelmästä". Samantapaisen ajatuksen esitti riippumattomasti Mark Gold samana vuonna. Sittemmin useat tutkijat ovat riippumattomasti päätyneet yhtäpitäviin käsitteisiin. Jeroslow on kehitellyt samaan ajatukseen perustuvaa "eksperimentaalista logiikkaa". Myös Jaakko Hintikka on yhdessä Arto Mutasen kanssa tutkinut vastaavaa käsitettä ja sen sovelluksia. Kysymyksessä on siis mitä ilmeisimmin varsin luonnollinen ajatus.

Siihen päädytään, kun hieman muutetaan Turing-koneen ajatusta. Nyt sallitaankin, että kone voi "muuttaa mieltään" äärellisen monta kertaa. Kone tulostaa tuloksenaan äärellisen jonon "kyllä"- ja "ei"-vastauksia. Viimeinen "kyllä" tai "ei" on lopullinen, oikea vastaus. Nyt kuitenkin luovutaan siitä oletuksesta, että voidaan ratkaista, milloin kone on lopettanut laskemisen. Jos koneen viimeisin tuloste on "kyllä", tiedämme että tämä on vastaus, *ellei* kone vielä muuta mieltään. Ei ole kuitenkaan olemassa mitään ratkaisumenetelmää, joka kertoisi, aikooko kone vielä muuttaa mieltään vai ei.

Ongelmat, jotka voidaan ratkaista tällaisen menetelmän avulla, ovat tavallaan "empiirisesti ratkeavia". Jos nimittäin *oletetaan* aina, että viimeisin vastaus on lopullinen, erehdytään äärellisen monta kertaa, mutta saavutetaan lopulta oikea vastaus. Mutta vaikka olisikin saavutettu oikea vastaus, ei voida varmasti tietää, että näin on tapahtunut. On kuitenkin tärkeää todeta, ettei tämä ole tarkoitettu millään tavalla Turingin analyysin ja Churchin-Turingin teesin kritiikiksi. Kyse on aivan eri käsitteestä. Se on kuitenkin hyvin luonnollinen käsite, ja tutkimisen arvoinen. Turingin menetelmiä soveltamalla on helppo todistaa, että on olemassa ongelmia, joita ei voida ratkaista edes tämän yleisemmän ja liberaalimman ratkaisumenetelmän avulla. Se, mitkä luonnolliset matemaattiset ongelmat ovat tässä mielessä ratkeavia tai ratkeamattomia, on kuitenkin vähemmän triviaalia.

Esimerkiksi kysymys siitä, onko diofanttisella yhtälöllä ratkaisuja kokonaislukujen joukossa, on nimittäin ratkeava yrityksen ja erehdyksen menetelmän suhteen. Sama pätee muihinkin tunnettuihin perinteisiin ratkeamattomiin ongelmiin tavallisen matematiikan piirissä. Onkin siis syytä kysyä, onko ylipäänsä olemassa mitään luonnollisia, tavallisen matematiikan piiristä nousevia ongelmia, jotka olisivat ratkeamattomia myös yrityksen ja erehdyksen menetelmän avulla. Asiaan on hiljattain saatu myönteinen vastaus. On osoitettu, että ongelma siitä, onko annetulla eksponentiaalisella diofanttisella yhtälöllä vain *äärellisen* monta ratkaisua vai ei (siis: äärettömän monta), on ratkeamaton jopa tässä yleisemmässä ja laajemmassa mielessä.[3] Kysymys on hyvin yksinkertainen ja luonnollinen. Kuitenkin se on siis hyvin vahvassa mielessä ratkeamaton. Sitä ei voida ratkaista edes "empiirisesti", yrityksen ja erehdyksen menetelmän avulla. Tämä ongelma on näin kertakaikkisesti ihmismielen kykyjen tuolla puolen.

Viitteet

1. ks. Raatikainen 2004.
2. ks. myös Raatikainen 2005.
3. Tämä osoitetaan kirjoituksessa Raatikainen, 2003.

Kirjallisuus

Casti, John L. & Werner DePauli, *Kurt Gödel – Elämä ja matematiikka*. Suomentanut Risto Vilkko. Art House, Helsinki 2000.

Davis, Martin, *Tietokoneen esihistoria Leibnizista Turingiin*, Suomentanut Risto Vilkko. Art House, Helsinki 2003.

Dawson, John W., *Logical Dilemmas. The Life and Work of Kurt Gödel*. A.K. Peters, Natick 1997.

Haaparanta, L. "Moderni logiikka", teoksessa P. Korkman & M. Yrjönsuuri (toim.) *Filosofian historian kehityslinjoja*. Gaudeamus, Helsinki 1998, 383–399.

Hodges, Andrew, *Alan Turing*. Arvoitus. Suomentanut Kimmo Pietiläinen, Terra Cognita, Helsinki 2000a.

Hodges, Andrew, *Turing*. Suuret filosofit 22. Suomentanut Risto Vilkko, Otava, Helsinki 2000b.

Raatikainen, Panu, "Laskettavuuden teorian varhaishistoria", teoksessa L. Haaparanta, E. Hyvönen, J. Seppänen and J. Silvonen (toim.) *Älyn oppihistoria – matka logiikan, psykologian ja tekoälyn juurille*. Suomen tekoälyseura, Espoo 1995, 198-198.

Raatikainen, Panu, "Some strongly undecidable natural arithmetical problems, with an application to intuitionistic theories", *Journal of Symbolic Logic* 68, 2003. 262-266.

Raatikainen, Panu, "Mitä uutta modernissa logiikassa?' teoksessa Kaisa Luoma, Erna Oesch & Risto Vilkko (toim.) *Filosofisia tutkielmia – Philosophical Studies in honorem Leila Haaparanta,* Acta Philosophica Tamperensia Vol. 4. Tampere University Press, Tampere 2004, 142-149.

Raatikainen, Panu, "On the philosophical relevance of Gödel's incompleteness theorems", *Revue Internationale de Philosophie* (ilmestyy 2005).

Rucker, Rudy, *Mieli ja äärettömyys. Äärettömyyden tiedettä ja filosofiaa*. Suomentanut Markus Hotakainen. Art House, Helsinki 1988.

Wright, Georg Henrik von, *Logiikka, filosofia ja kieli*. Otava, Helsinki 1958 (2., uusittu painos 1968).