TUOMO AHO

DESCAR
GEOMET

René Descartesin L*a Géométrie* ilmestyi Leydenissa vuonna 1637. Silloin Descartes oli jo kauan harrastanut matematiikkaa, mutta G*eometria* oli hänen ensimmäinen matemaattinen julkaisunsa, ja se jäi myös ainoaksi. Myöhemminkin hän vielä ratkaisee matemaattisia kysymyksiä kirjeenvaihdossaan, mutta päähuomio keskittyy yhä selvemmin filosofiaan; luonnon tutkimus säilyy mukana (*Principia* 1644), mutta se alkaa saada leimansa enemmän filosofisesta systeemistä. Ja se on vahinko, sillä ymmärtääkseni Descartes oli tieteilijänä menestyksekkäämpi kuin filosofina, ja G*eometrian* matemaattinen teoria oli hänen paras saavutuksensa.

Geometria, *Optiikka* ja *Meteorologia* ilmestyivät samassa niteessä kuin kuuluisa *Metodin esitys*. Niiden on tarkoitus olla filosofisen perusteoksen liitteitä tai sovellutuksia. Mutta onko ainakaan G*eometrialla* mitään sisällöllistä yhteyttä filosofiseen metodikirjaan? Descartes ei siinä viittaa filosofiaan, ei käytä mitään filosofisia tuloksiaan, ja metodista hän lausuu vain eräitä sinänsä teräviä huomautuksia käsitteellisesti yksinkertaisten ja systemaattisten menetelmien puolesta. Pinnan alla on kuitenkin ajatuskulkuja, jotka yhdistävät Descartesin filosofista ja matemaattista ohjelmaa. Ensinnäkin hän oli argumentoinut osoittaakseen vanhan alkeislogiikan riittämättömyyden, ja *Geometriassa* hän nyt antaa konkreettisia esimerkkejä matemaattisista tehtävistä, jotka vaativat uudenlaista päättelyä. Tämän aiheen yksityiskohdat ovat kiistanalaisia, enkä yritä nyt käsitellä niitä. Toinen näkökohta on yleisluontoisempi: Descartes epäilemättä ajatteli matemaattisen suorituksensa kuuluvan osaksi tieteellistä maailmankuvaa, osaksi rationaalista kokonaisnäkemystä, joka mahdollistaa todellisuuden luotettavan kuvaamisen vähillä premisseillä.

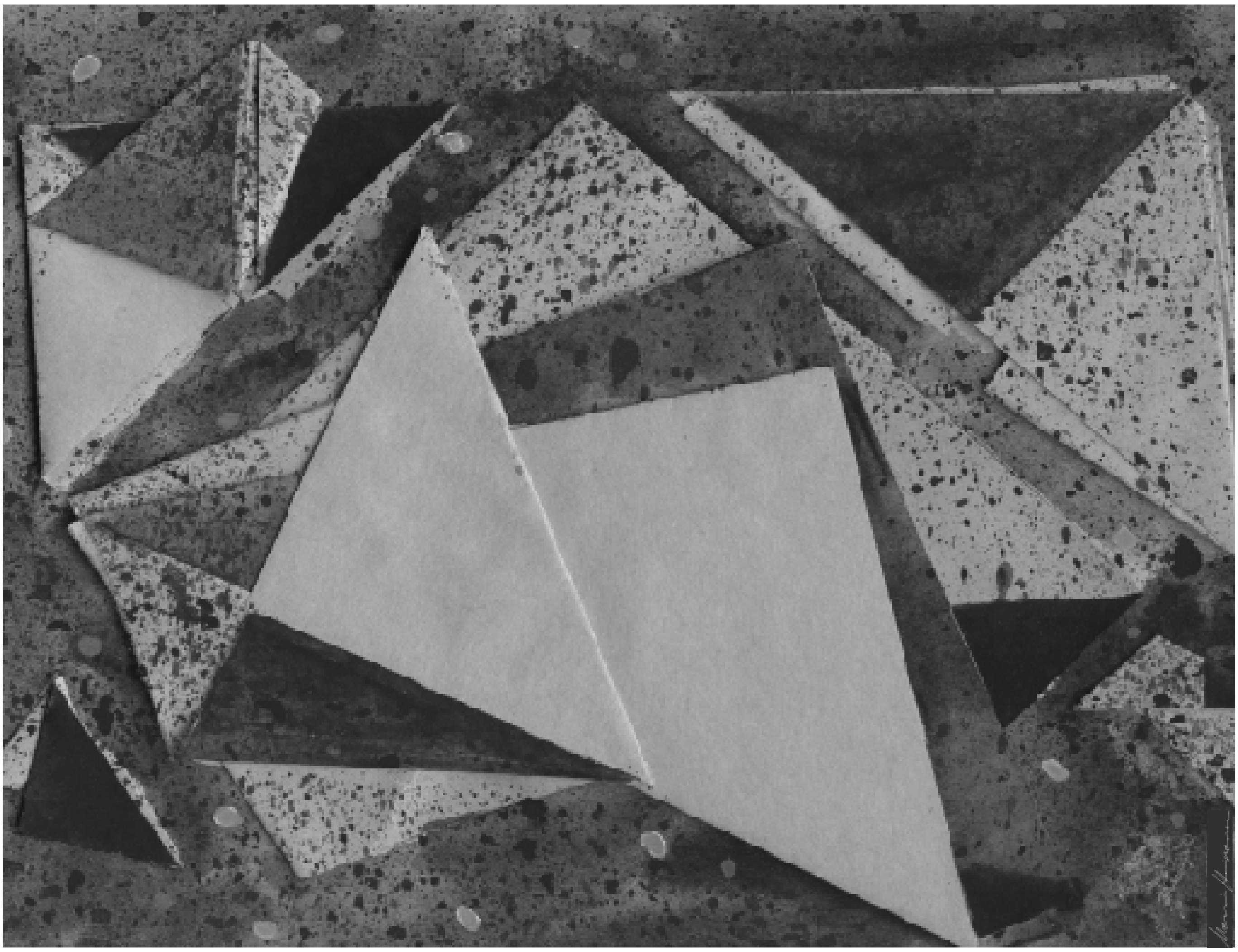
Jos Descartesin ihanteena siis olikin mahdollisimman laaja yleistys, vastaansanomaton ilmeisyys ja täsmällinen demonstraatio, ja vaikka hänen tyylinsä jälleen on eleganttia, hänen *Geometriansa* on varsin vaivalloinen lukea. Siihen vaikuttaa, että teksti on erittäin tiivistä: 120 sivulla käsitellään aivan erilaisia probleemoita ja tuodaan mukaan nopeassa tahdissa yhä uusia keksintöjä. Useissa kohdissa Descartes vain mainitsee tulokset ja sivuuttaa todistukset viittauksella; toisinaan hän sivuuttaa tuloksetkin sanoen vain, että ne ovat edellisten kanssa analogisia. Herkullinen on hänen omahyväisyytensä: “Tässä muuten olen jättänyt pois useimmat todistukset, koska ne näyttivät niin helpoilta, että kunhan vaivaudutte tutkimaan niitä järjestelmällisesti ne löytyvät itsestään; ja on hyödyllisempää oppia ne sillä lailla kuin lukemalla.”

TES JA
TRIA

Kerran hän kirjoittaa Mersennelle: “Kaikki korjausehdotukset ovat koskeneet vain selventämistä lukijoiden avuksi, mutta ne ovat yleensä olleet niin häijyjä että aivan inhottavat minua.”

Jonkinlainen luettavuus pelastuu, koska Descartes käyttää tehokasta symboliikkaa. (Se ei ole triviaali asia — kuten voi oivaltaa, jos ajattelee, millaista olisi matematiikan tekeminen ilman symboliikkaa.) Hän puhuttelee geometristen konstruktioittensa olioita johdonmukaisesti kirjainsymboleilla; aritmeettisia toimituksia hän tiivistää uusilla merkinnöillään. Potenssien eksponentit ja juurimerkit ovat peräisin Descartesin *Geometriasta*. Mutta kaikkein kauaskantoisin symboliikan saavutus on järjestelmällinen vakioiden ja variaabelien erottelu. Descartes merkitsee vakioita, “annettuja”, kirjaimin a, b, c,… ja muuttujia x, y, z,…, aivan kuten nykyisessäkin matematiikassa merkitään, ja sitä paitsi hän oli täysin selvillä siitä mitä muuttujat ovat. Tässä hän pääsee pitemmälle kuin edeltäjänsä. Matemaattisessa tehtävässä eri muuttujilla on määrätty keskinäinen riippuvuus; yksinkertaisimmassa tapauksessa suureen x tiettyä arvoa, jokaista sen mahdollisista arvoista, vastaa myös muuttujan y tietty arvo. Nykyisin tämä ilmaistaan sanomalla, että y on x:n funktio, $y = f(x)$. Descartes ei vielä käytä tätä puhetapaa, mutta itse asian hän on löytänyt. Funktionaalinen tarkastelu antaa matemaattisille tilanteille ratkaisevasti syvällisemmän sisällön. (Luonnollisesti sitä oli aiemminkin implisiittisesti sovellettu, mutta ei tehty variaabelitekniikalla selväksi.)

Descartesin esitys on suppea, mutta se sopii tavallaan yhteen hänen tavoitteensa kanssa. Hän nimittäin sanoo ja myös käytännössä osoittaa, että hän haluaa redusoida probleemoita pieneen määrään perusprobleemoita ja alkeellisia operaatioita, joita oikein kombinoimalla voitaisiin johtaa edistyneemmät tulokset. Hän oli tyytymätön siihen, että jokainen klassisen geometrian teoreema piti todistaa erikseen ja uudella vaivannäöllä. Pyrkiessään korvaamaan probleemat yksinkertaisemmilla hän otti ratkaisevan askelen, joka merkitsee analyyttisen geometrian syntyä: Kreikkalaisissa geometrisissa konstruktioissa täytyy lisätä ja vähentää janoja, kertoa niitä (suorakaiteiksi), jakaa niitä ja ottaa neliöjuuria. Descartes toteaa, että jos jollekin janalle valitaan



yksikköpituus 1, jolloin kaikki pituudet saavat mittaluvun, nämä operaatiot voidaan suorittaa yhtä hyvin aritmeettisesti, pituuksien mittaluvuilla. Vaikka siis konstruktio Descartesin mielestä tapahtuu geometrisilla olioilla, kaikki laskut voidaan tehdä aritmeettisesti, koska janoilla on numeeriset arvot. Ja tämä helpottaa asiaa suuresti. Probleemien ratkaisemiseksi täytyy vain laskutoimituksilla osoittaa, että eräät luvut täyttävät asianmukaisia ehtoja.

Funktionaalinen ote johtaa koordinaatistoihin, sillä käyrät, joita Descartesin geometria käsittelee, voidaan tulkita funktioiden kuvaajiksi koordinaatistossa. Tasossa jokaisella pisteellä on kaksi koordinaattia x ja y, ja käyrän S kaikilla pisteillä nämä koordinaatit täyttävät jonkin ehdon. Termi "karteesinen koordinaatisto" on tullut tutuksi, mutta itse asiassa Descartes ei vaatinut että koordinaatisto olisi suorakulmainen, eikä hän myöskään keksinyt sitä ensimmäisenä. Fermat oli jo käyttänyt koordinaattiesitystä, ja Fermat ja Descartes toisistaan riippumatta selittävät, että käyrät geometrisessa koordinaatistossa ovat funktioiden kuvaajia. Descartes etenee päättelemällä myös toisin päin, että algebrallinen lauseke voi olla käyrän yhtälö ja että yhtälöä muuttamalla saadaan aikaan säännöllisiä geometrisia muutoksia. Descartes olisi kelpuuttanut geometrian piiriin vain sellaiset käyrät, joiden yhtälö on, kuten nykyisin sanottaisiin, algebrallinen, so. muodostettavissa kertomalla ja summaamalla muuttujien potensseja. Leibniz oli tässä jo vapaamielisempi, ja todellisuudessa Descartes itsekin tutki myös ei-algebrallisia käyriä. (Ja algebrallistenkin käyrien luokka on paljon laajempi kuin kreikkalaisen geometrian käyrien.)

Geometriaan mahtuu ratkaistaviksi vain vähän konkreettisia geometrisia esimerkkejä, jotka on niin ollen valittu edustavasti. Lähtökohtana ovat selvästi myöhäisantiikin suurten geometrikkojen (Pappos, Apollonios, Diofantos) säilyneet teokset. Mutta Descartes tekee selväksi, että hän aikoo sekä yleisyydessä että ratkaisuvoimassa selvästi ylittää kreikkalaiset, ja niinpä hän ratkaiseekin muutaman entisille metodeille ylivoimaisen probleeman. Ei liene syytä ryhtyä tässä selostamaan mitään Descartesin esimerkkiä, joiden joukossa on nykyisenkin mittapuun mukaan vaativia tehtäviä. Sen sijaan sanon jotain yleisestä menettelytavasta, jota hän probleemoissaan noudattaa.

Hän käsittelee geometrisia probleemoitaan konstruktiotehtävinä: tiettyjen oletusten määrittelemässä kuviossa on löydettävä vaatimukset täyttävä jana tai piste. Yksinkertaisimmat tehtävät *Geometrian* I kirjassa ratkeavat suoralla laskulla ja antavat tuloksen, joka ei riipu tuntemattomasta. Mutta tyypillisempi on mahdollisuus, että kysytty y saa eri arvoja jonkin tuntemattoman x eri arvoilla. Tällöin "täytyy aluksi olettaa, että ratkaisu on jo saatu", toisin sanoen, että konstruoitava jana on jo kuviossa paikallaan, ja sitten tulee geometristen suhteiden perusteella päätellä, mitä voidaan sanoa tämän janan pituudesta y. Kuvion eri osia vertailemalla voidaan löytää useita ehtoja, joita suureiden y,x,z,a,b,c,... pitäisi keskenään täyttää. Näitä ehtoja algebrallisesti sieventämällä ja käsittelemällä voidaan päästä tilanteeseen, jossa yhdelle tuntemattomalle saadaan kaksi lauseketta. Kirjoittamalla niiden välille yhtälö, on yksi tuntemattomista saatu eliminoiduksi. Jos näitä yhtälöitä löytyy yhtä paljon kuin on tuntemattomia, ratkaisu on yksikäsitteinen; jos yksi vähemmän, ratkaisussa on yksi vapaa muuttuja; ja niin edespäin. Hän jatkaa havainnoilla tärkeiden yhtälöiden asteluvusta, käyrien leikkauspisteistä, ja monesta muusta seurauksesta. Mutta riittäköön huomautus, että itse perusargumentaatio on paitsi erittäin tehokas myös filosofisesti kiinnostava.

Hyvin tärkeitä ovat Descartesin tulokset käyrien luokittelusta eri tyyppeihin kompleksisuuden mukaan niin, että geometrisen konstruktiotavan ja yhtälön asteen yhteys ilmenee. Hän antaa myös säännön käyrän normaaleille ja tangenteille. Ohimennen hän vihjaa mahdollisuuteen, että analyyttinen geometria soveltuisi kolmiulotteiseen avaruuteen. Siinä hän siis ennakoi myöhempää kehitystä, mutta epäillessään, ettei käyrän viivan pituudesta voi mielekkäästi puhua, hän on vastakkain myöhemmän integraalilaskennan kanssa. *Geometrian* III kirja sisältää vielä materiaalia, joka ei näytä lainkaan geometriselta, nimittäin teoriaa niiden yhtälöiden käsittelystä, joita probleemoissa syntyy. Descartes osoittaa huomattavaa teknistä virtuositeettia näyttäessään, kuinka monimutkaisia yhtälöitä voidaan järjestelmällisesti palauttaa yksinkertaisempaa muotoon vaihtamalla muuttujia ja ottamalla tekijöitä. Hänellä on metodi polynomin rationaalijuurten löytämiseksi ja kohtalaisen selvä käsitys yhtälön positiivisista, negatiivisista ja imaginaarisista juurista.

Ilmeisesti Descartes suhtautui matematiikkaan kuten taiteisiinkin melko lailla hyödyn kannalta. Hän on innokas korostamaan matematiikan sovellettavuutta, sen arvoa luonnon tutkimuksessa. Niinpä *Geometriassa* on pitkä jakso optiikasta, jossa hän johtaa yhtälöt sellaisten linssien muodolle, jotka taittavat valoa vaaditulla tavalla. Muualla hän myös muistaa korostaa, että fysiikan systeemi käyttää matematiikkaa. (Tosin hän ei itse tehnyt tällaista matematisoitua systeemiä, ja hänen fysiikkansa kvantitatiiviset tulokset ovat täysin vääriä.)

Descartesin päähuomio *Geometriassa* oli konstruktiotehtävissä. Hän teki nimenomaan geometriaa ja suoritti konstruktioita, joissa hänellä oli ennennäkemättömän tehokas väline, keksimänsä algebrallinen tekniikka, joka tekee analyyttisen geometrian mahdolliseksi. Myöhempi aika on vaihtanut näkökulmaa: konstruktiotehtävät ovat enää sovellutus, pääasia on analyyttinen esitystapa, jolla koko geometria voidaan esittää systemaattisesti, abstraktisti ja havainnosta riippumatta. (Tässä mielessä Husserlin ajatus eurooppalaisen tieteen kartesiolaisesta taustasta sopii ehkä paremmin seuraajiin kuin Descartesiin itseensä.) Descartesin tekstin vaikeus haittasi hänen teoriansa tunnetuksi tulemista — useita kommentaareja ja selitysteoksia julkaistiin — ja ennen pitkää ajattelutapa oli toisenlainen kuin hänellä. Mutta näin kehittynyt analyyttinen geometria oli 1700- ja 1800-luvun klassisessa matematiikassa kulmakivi, jota käytettiin lähes kaikilla aloilla.

Analyyttinen geometria lienee menettänyt asemiaan matematiikan alkeisopetuksessa. Siksi täytyy korostaa sen merkitystä filosofin peruskoulutuksessa. Älkää käsittäkö minua väärin! En tarkoita, että se antaisi erityisen suvereenin kyvyn sotkeutua filosofisiin kysymyksiin. Tarkoitan vain, että se kuuluu alkeelliseen yleissivistykseen. Ja epäilemättä se on korvaamattoman tärkeä René Descartesin ajattelun ymmärtämiseksi.